

КОМПЬЮТЕРНАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ СИЛОВЫХ ЛИНИЙ ПОСТОЯННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И ПОСТОЯННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ

Ляпцев А. В.¹, ✉ upm_eno@mail.ru

¹Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена,
Российская Федерация, 191186, Санкт-Петербург, наб. реки Мойки, 48

Аннотация

Предлагается метод построения картины силовых линий постоянных электрического и магнитного полей, основанный на численном решении системы дифференциальных уравнений, с последующей визуализацией графиками в трехмерном пространстве. Показано, что применение подобного метода позволяет понять и продемонстрировать некоторые качественные особенности силовых линий, обусловленные, в частности симметрией рассматриваемых систем. Рассмотренные примеры показывают, что даже для простейших систем, изучаемых в курсах электростатики и магнитостатики, картина силовых линий может иметь сложный, а иногда и непредсказуемый характер.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, силовые линии электрического поля, силовые линии магнитного поля, визуализация силовых линий.

Цитирование: Ляпцев А. В. Компьютерная визуализация силовых линий постоянного электрического и постоянного магнитного полей // Компьютерные инструменты в образовании. 2026. № 1. С. 22–39. doi:10.32603/2071-2340-2026-1-22-39

1. ВВЕДЕНИЕ

При изучении физики как в школьном, так и в вузовском курсе используется понятие силовых линий электрического поля и силовых линий магнитного поля. Силовые линии определяются как линии, касательные к которым направлены так же, как соответствующие векторы электрического или магнитного поля в точке касания. Направление соответствующих векторов определяют направление силовых линий. Вообще говоря, понятие силовых линий не является необходимым при изучении электромагнетизма. Более того, во многом оно является условным. Об этом, в частности, говорил Фейнман в своих лекциях, отмечая, что картины силовых линий не соответствуют принципу суперпозиции, который имеет место для полей [1]. Например, картину линий электрического диполя никак нельзя получить из картин линий одиночных зарядов. Тем не менее, такие картины являются в определенном смысле наглядными, а сведения о них помогают в ряде случаев при решении задач.

В учебниках и учебных пособиях, как правило, приводятся картины силовых линий для простейших систем. Такими при изучении электростатики являются одиночные то-

чечные заряды и заряженные сферы, диполь, пара одинаковых зарядов, пластины конденсатора. В магнитостатике — это прямолинейный проводник, круговой виток с током, соленоид, постоянный магнит. Несмотря на то, что понятие силовых линий определяется для трехмерного пространства, картины силовых линий изображаются, как правило, в плоскости. Это, помимо простоты изображения, оправдано ещё и тем, что для вышеприведенных систем имеет место осевая симметрия, откуда следует, что для всех плоскостей, проходящих через ось симметрии, картина силовых линий одинакова. Понятно, однако, что в отсутствие подобной симметрии картины силовых линий могут оказаться более сложными и для их изображения будет недостаточно привести проекции этих линий на какую-либо плоскость. Построить такие линии «на глаз» без обращения к вычислительным средствам практически невозможно.

Проблема визуализации силовых линий на современном уровне экспериментальных и вычислительных возможностей затрагивается в ряде работ. При этом предлагаются методы, основанные на натуральных экспериментах [2], методы, основанные на численных расчетах [3–5], а также методы построения силовых линий при обработке лабораторных измерений компьютерными средствами [6, 7].

В современных программах для математического моделирования, например в Matlab, имеются процедуры, позволяющие строить силовые линии. В учебном пособии [8] приведен пример использования подобной процедуры «streamline» для построения силовых линий магнитного поля витка с током. В работе [5] для визуализации силовых линий магнитного поля используется другая процедура среды Matlab — «quiver». Для построения линии при использовании этих процедур необходимо вычислить значение векторов напряженности электрического поля или, соответственно, векторов магнитной индукции на узлах задаваемой решетки (двумерной или трехмерной в зависимости от задачи). Процедуры хорошо работают, когда известны некоторые особенности силовых линий. Например, известно, что силовые линии лежат в одной плоскости, что позволяет ограничиться двумерной решеткой. Для более сложных систем, когда необходимо вычислить силовую линию в трехмерном пространстве, во-первых, существенно возрастает время вычислений. Во-вторых, в случае, когда заранее неизвестно, куда из исходной точки пойдет силовая линия, для построения приходится проводить вычисления для большинства «лишних» точек. В данной работе предлагается другой метод построения силовых линий, основанный на решении системы дифференциальных уравнений 1-го порядка. Результаты вычислений иллюстрируются для ряда систем, картина силовых линий которых имеет весьма нетривиальный вид в трехмерном пространстве.

2. ПОСТРОЕНИЕ СИЛОВЫХ ЛИНИЙ ПУТЕМ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

При изучении электродинамики учащиеся знакомятся с понятиями, которые, если вдуматься, могут показаться странными. Вводятся такие величины, как «поток вектора напряженности электрического поля» и «поток вектора индукции магнитного поля». С понятием «поток», конечно, все ученики уже знакомы, например, «поток воды». Но что течет, когда речь идет об электромагнитных полях? А что «источает» электрический заряд, являющийся «источником электрического поля»? Исторически сложившаяся терминология становится понятной, когда мы обратимся к полю скоростей жидкости. В стационарном потоке жидкости можно определить поле $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, где \mathbf{v} — вектор скорости частицы жидкости, находящейся в точке с радиус-вектором \mathbf{r} (здесь и далее для обозначения векторов используется полужирный шрифт). Применяв математическое правило вычисления

потока через некоторую поверхность, легко понять, что поток векторного поля $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ есть просто объем жидкости, протекающей через данную поверхность за единицу времени. Для несжимаемой жидкости становится очевидной теорема Гаусса. Если ничто не поставляет жидкость в некоторую область, ограниченную замкнутой поверхностью, то сколько жидкости «втекло» в поверхность за какой-то промежуток времени, столько и «вытекло». А вот если внутри этого ограниченного объема есть источник, то количество жидкости, поставляемой этим источником, и дает отличный от нуля поток.

Подобная аналогия позволяет легко понять, что такое «силовая линия». Для потока воды это просто траектория движения некоторой частицы (некоторого малого объема) воды. Эта траектория определяется простым уравнением:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}(\mathbf{r}),$$

где точка над переменной — стандартное обозначение для производной по времени. Но, поскольку математическое описание поля жидкости и электромагнитного поля одинаково, то для расчета силовых линий электрического поля и магнитного поля можно применить аналогичные уравнения:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (2)$$

С точки зрения физика эти уравнения не являются правильными, поскольку размерности левых и правых частей уравнений не совпадают. Но при построении силовых линий полей важны не модули значений векторов, а только их направления. Это, например, означает, что картина линий для диполя с зарядами 1 мКл и -1 мКл будет такой же, как и для зарядов 1 Кл и -1 Кл. Из этого следует, что расчет картины силовых линий не изменится, если правые части уравнений (1) и (2) мы умножим на любую константу, в том числе и константу, дающую правильную размерность. Можно и по-другому подойти к проблеме размерности. Вместо переменной времени, измеряемой в секундах, можно ввести пропорциональную времени переменную нужной размерности.

Заметим, что рассуждения об аналогии полей позволяют понять использование уравнений (1) и (2) для расчета силовых линий, но не являются необходимыми для их обоснования. Из аналитической геометрии известно (см., например, [9]), что кривую в трехмерном пространстве можно задавать параметрически: $\mathbf{r}(s)$, где s — некоторая скалярная переменная. При этом вектор $d\mathbf{r}/ds$ направлен по касательной к кривой.

Отметим ещё одну особенность расчета силовых линий при помощи уравнений (1) и (2)). При расчете линий напряженности электрического поля от системы нескольких зарядов при помощи уравнения (1) модуль одного из зарядов можно положить равным единице, а другие заряды измерять в единицах этого выбранного заряда. Аналогично при вычислении линий вектора магнитной индукции для системы из нескольких токов значение силы одного из токов можно положить равным единице, а остальные токи измерять в единицах этого выбранного тока.

3. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ЛИНИЙ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ И НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ТАКИХ ЛИНИЙ

Напряженность электрического поля от системы точечных зарядов определяется выражением:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i (\mathbf{r} - \mathbf{R}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_i|^3}, \quad (3)$$

где q_i — величина i -го точечного заряда (с учетом знака), \mathbf{R}_i — радиус-вектор точки, в которой расположен i -й заряд.

Каждое из векторных дифференциальных уравнений (1) и (2) после проектирования на оси системы координат приводится к системе трех дифференциальных уравнений 1-го порядка. Для решения такой системы дифференциальных уравнений удобно использовать процедуры, входящие в вычислительные среды, например, процедуру «ode45» и другие подобные ей в среде Matlab. При этом следует учитывать некоторые особенности, связанные с численным расчетом.

1. Для расчета линии необходимо задать время, в течение которого производится расчет — T_{\max} и начальную точку с радиус-вектором \mathbf{r}_0 . Однозначного правила для выбора времени расчета сформулировать нельзя, оно подбирается в результате вычислительного эксперимента.

2. Понятие «точечный заряд» является идеализацией. В природе любое заряженное тело имеет конечные размеры. Поэтому следует рассматривать заряды как небольшие шары заданного радиуса R_0 . Из этого следует, что начальная точка должна удовлетворять соотношению $|\mathbf{r}_0 - \mathbf{R}_i| > R_0$ для всех зарядов. Также расчет должен заканчиваться если силовая линия подошла к i -му заряду на расстояние R_0 , то есть выполнено условие $|\mathbf{r} - \mathbf{R}_i| = R_0$.

3. Особое внимание следует обращать на линии, проходящие вблизи нерегулярных точек — точек, в которых $\mathbf{E} = 0$. Примером такой точки является точка в системе из двух одинаковых зарядов, находящаяся посередине между зарядами. Если, например, выбрать оси так, чтобы заряды находились на оси x , и начать расчет с точки, лежащей на оси x между зарядами, то результат вычисления закончится в точке, лежащей посередине между зарядами при любом заданном времени расчета T_{\max} . Это противоречит общему правилу, которое формулируется для линий напряженности электрического поля: линии напряженности могут начинаться на положительных зарядах, заканчиваться на отрицательных зарядах, приходиться из бесконечности, или уходить на бесконечность. Понять причину такой «ошибки» в расчете можно, рассмотрев соответствующее аналитическое уравнение.

Пусть два одинаковых единичных заряда расположены на оси x в точках с координатами 1 и -1 . Напряженность поля в точке с координатой x всегда направлена вдоль оси x и определяется выражением:

$$E_x(x) = \frac{x-1}{|x-1|^3} + \frac{x+1}{|x+1|^3}.$$

Решение дифференциального уравнения (1) для начальной точки x_0 сводится к вычислению интеграла:

$$t = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{E_x(x')}. \quad (4)$$

Этот интеграл вычисляется аналитически, и при $|x_0| < 1$ уравнение (4) приводится к виду:

$$t = 1/4 \left(\ln(|x_0|) - \ln(|x|) + x^2 - x_0^2 - (x^4 - x_0^4)/4 \right).$$

При $|x| \ll 1$, то есть вблизи нерегулярной, точки всеми слагаемыми, кроме слагаемого $-\ln(|x|)/4$ можно пренебречь, в результате чего получим:

$$|x(t)| = \exp(-4t).$$

Таким образом, при больших значениях t линия, исходящая из точки x_0 , будет асимптотически приближаться к нулю.

Из приведенного выше рассмотрения следует, что при задании начальных условий нужно с осторожностью относиться к случаям, когда линия может проходить через регулярную точку. Заметим, однако, что если при рассмотрении предыдущего примера поместить заряды не на одной координатной оси, то приближенные вычисления с использованием процедуры решения системы дифференциальных уравнений не приведут к тому, что линия «уткнется» в нерегулярную точку. Вблизи нерегулярной точки линия «пойдет, повернувшись на 90° относительно оси симметрии». В определенном смысле приближенные вычисления лучше соответствуют реальным объектам. В водном потоке частичка воды так или иначе обогнёт соответствующую точку.

В качестве примера приведем картину линий системы двух точечных разноименных зарядов (см. рис. 1), рассчитанную описанным выше способом. На рисунке 1а заряды одинакового модуля, а на рисунке 1б — модуль одного заряда в 2 раза больше другого.

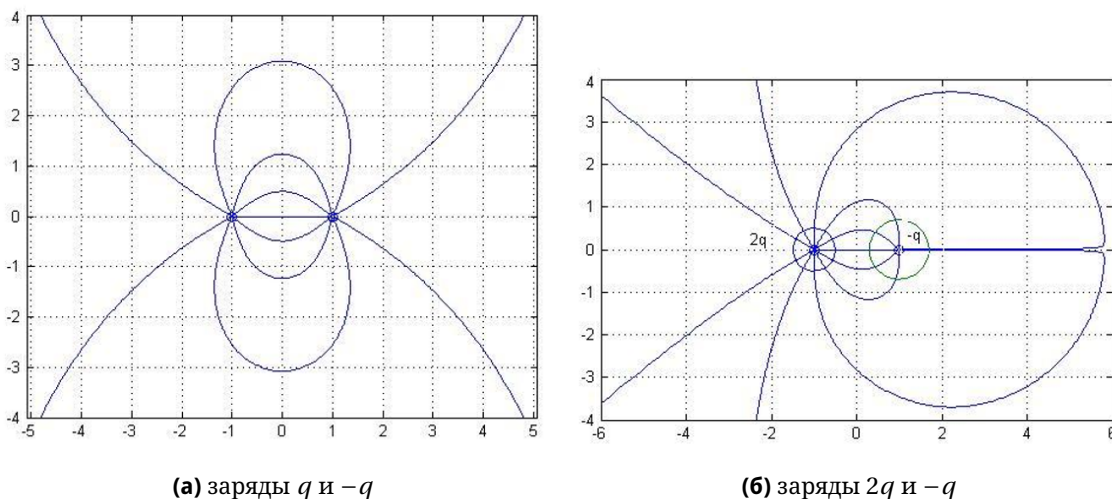


Рис. 1. Рассчитанные линии напряженности электрического поля для системы двух разноименных зарядов

На рисунке намеренно не приведены направления линий. Линии всегда направлены от положительного заряда к отрицательному. Подобная симметрия — инвариантность картины силовых линий относительно изменения знаков всех зарядов системы на противоположные — прямо следует из выражения для напряженности электрического поля (3). При расчете размер каждого заряда (радиус шара заряда) полагался равным 0,01. Начальные направления линий определялись углами $0^\circ, \pm 30^\circ, \pm 60^\circ, \pm 90^\circ, \pm 120^\circ, \pm 150^\circ$. Две сливающиеся линии на рис.1б соответствуют углам $\pm 90^\circ$. На самом деле расчет даёт две отдельные линии. Но, поскольку расстояние между ними при «подходе» к правому заряду равно приблизительно $3 \cdot 10^{-6}$, «разделить» эти линии на рисунке невозможно. Компьютер считает точнее, чем мы можем изобразить на рисунке.

Заметим, что, если заменить точечные заряды непроводящими шарами со сферически симметричными распределениями заряда и центрами в тех точках, где находятся точечные заряды, то картина силовых линий вне шаров будет такой же, как и для точечных зарядов. Это следует из того, что поле подобного шара вне шара такое же, как поле точечного заряда, находящегося в точке, где расположен центр шара. На рисунке 1б в ка-

честве примера такие шары изображены окружностями. Радиус левого шара 0,5 и правого — 0,7. Картина силовых линий внутри шаров, естественно, зависит от распределения заряда в каждом из шаров. В отличие от этого расчет картины силовых линий от заряженных проводящих шаров оказывается значительно сложнее, поскольку на распределение зарядов внутри шара влияют заряды на другом шаре. В этом случае для расчета можно применить метод зеркального отражения, изложенный, например, в лекциях Фейнмана [1]. В соответствии с этим методом распределение заряда внутри каждого из шаров моделируется как бесконечная система точечных зарядов. Величины этих зарядов и их координаты образуют некоторые последовательности, так что соответствующий ряд для напряженности электрического поля достаточно быстро сходится. Численно результаты расчета системы двух проводящих разноименно заряженных сфер изложены в одной из задач учебного пособия [8]. Используя результаты такого расчета, можно сделать расчет картины силовых линий подобной системы.

Как уже упоминалось, каждая из линий напряженности поля для электрического диполя лежит в одной плоскости. Это легко доказать, исходя из принципа симметрии. Через две точки, в которых расположены заряды, и точку, из которой начинается расчет линии, можно однозначно провести плоскость. Исключение представляют только точки, лежащие на прямой, которая проходит через точки зарядов диполя. Если координаты системы отсчета выбрать так, что ось z перпендикулярна данной плоскости, то в силу симметрии по отражению относительно плоскости (x, y) проекция $E_z(x_0)$ равна нулю. Из этого следует, что последующие рассчитанные точки линии также будут лежать в плоскости (x, y) .

Для системы зарядов, лежащих на одной прямой, существует бесконечное число плоскостей симметрии. Для более сложной системы, когда заряды не лежат на одной прямой, число плоскостей симметрии конечно, или же подобная симметрия может отсутствовать. Простейшая из таких систем — три одинаковых заряда, лежащих в вершинах равностороннего треугольника. Эта система имеет 4 плоскости симметрии — одна является плоскостью, в которой лежат заряды, и три другие перпендикулярны этой плоскости и проходят через заряд и середину противоположной стороны треугольника. Если начальная точка линии лежит в одной из плоскостей симметрии, то в силу симметрии вся линия также лежит в этой плоскости, что, конечно же, подтверждается расчетами. Однако для произвольной начальной точки такая симметрия отсутствует, и, следовательно, нет каких-либо причин, вследствие которых вся линия лежит в одной плоскости. Точки, для которых выход линии из одной плоскости явно проявляется, можно попытаться найти численным экспериментом. Естественно, расчет при этом должен проводиться в трехмерном пространстве. Достаточно ярко выраженный результат численного эксперимента приведен на рисунке 2.

В качестве системы выбрана система из трех одинаковых положительных зарядов, один из которых находится в точке с координатами $\mathbf{R}_1 = (1, 0, 0)$, а два других лежат в плоскости (x, y) на прямой параллельной оси y , так, что соединяющие заряды линии образуют равносторонний треугольник. В качестве начальной точки взята точка со следующими координатами:

$$x_0 = 1 + a \cos \theta \cos \varphi,$$

$$y_0 = a \cos \theta \sin \varphi,$$

$$z_0 = a \sin \theta.$$

Параметры a , θ и φ подбирались так, чтобы «выход» линии из плоскости проявлялся визуально в наибольшей степени. Параметры, соответствующие кривой на рис. 2: $a = 0,3$, $\theta = 0,0001$, $\varphi = 5\pi/6 + 0,35$. Эта начальная точка обозначена на рисунках символом «*».

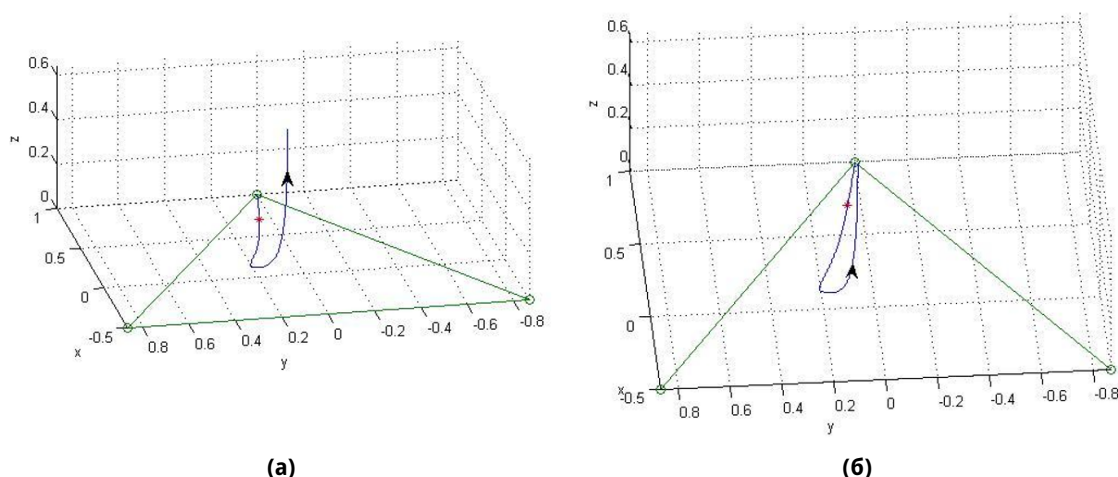


Рис. 2. Линия напряженности электрического поля системы трех одинаковых зарядов, лежащих в вершинах равностороннего треугольника. На рисунках а и б изображены разные проекции линии

Из начальной точки построена линия по направлению поля (направление обозначено стрелкой) и в противоположном направлении до соответствующего заряда. Чтобы построить линию в противоположном направлении достаточно в выражении (3) поменять знаки зарядов на противоположные и провести вычисление из той же начальной точки.

Процедуры построения трехмерных графиков в таких вычислительных средах, как Matlab и Octave, позволяют вращать графики так, что на плоскость листа можно вывести разные проекции. Чтобы убедиться, что построенная кривая не лежит в одной плоскости, нужно повернуть график так, чтобы начальная и конечная точки совместились. Если линия напряженности лежит в одной плоскости, при совмещении начальной и конечной точек линия отображается в виде прямого отрезка. В противном случае линия отображается в виде петли, что имеет место на рис. 2б.

4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ЛИНИЙ ИНДУКЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ТАКИХ ЛИНИЙ

В соответствии с законом Био-Савара-Лапласа магнитное поле, создаваемое малым элементом тока I , определяется выражением:

$$\Delta \mathbf{B} = I \frac{\Delta \mathbf{l} \times \mathbf{R}}{R^3}, \quad (5)$$

где $\Delta \mathbf{l}$ — вектор с длиной элемента тока, ориентированный по направлению тока, \mathbf{R} — вектор, направленный от элемента тока $\Delta \mathbf{l}$ к точке, где определяется магнитное поле. Использовано стандартное обозначение для векторного произведения. Системные коэффициенты здесь опущены, поскольку для вычисления картины силовых линий они не важны. При использовании конечных не малых элементов тока необходимо провести интегрирование. Заметим, что при вычислении силовых линий магнитного поля при помощи уравнения (2) следует учитывать те же особенности, что и при вычислении силовых линий электрического поля. Начало силовой линии не должно начинаться в точке, через которую проходит ток. И следует с осторожностью относиться к нерегулярным точкам, в которых $\mathbf{B} = 0$.

При определении индукции магнитного поля от конечных элементов тока интегрирование в аналитическом виде можно провести для отрезков прямых, по которым протекает ток. Пусть в некоторой системе отсчета начало прямолинейного отрезка с током определяется радиус-вектором \mathbf{R}_{in} , а конец этого отрезка радиус-вектором \mathbf{R}_{fin} (рис. 3).

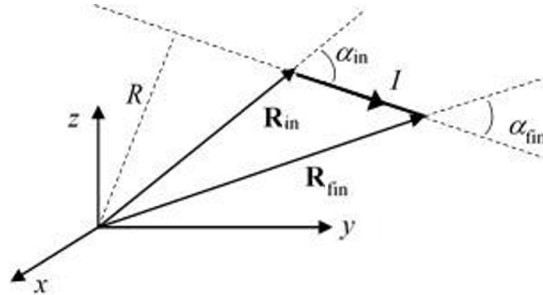


Рис. 3. К определению поля прямолинейного отрезка с током

Вектор индукции магнитного поля в начале координат, создаваемый током, протекающим в данном отрезке, определяется выражением:

$$\mathbf{B} = B\mathbf{e}_B, \quad (6)$$

где \mathbf{e}_B — единичный вектор, определяющий направление вектора индукции магнитного поля:

$$\mathbf{e}_B = \frac{\mathbf{R}_{in} \times \mathbf{R}_{fin}}{|\mathbf{R}_{in} \times \mathbf{R}_{fin}|},$$

$$B = I \frac{\cos(\alpha_{fin}) - \cos(\alpha_{in})}{R},$$

$$R = I \frac{\sqrt{(R_1 R_2)^2 - (\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2)^2}}{|R_1 - R_2|},$$

косинусы углов α_{in} и α_{fin} определяются соотношениями:

$$\cos(\alpha_i) = \frac{(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) \cdot \mathbf{R}_i}{|R_2 - R_1| R_i},$$

символ « \cdot » — стандартное обозначение для скалярного произведения векторов.

Чтобы рассчитать вектор индукции магнитного поля в произвольной точке, определенной радиус-вектором \mathbf{r} , в вышеприведенных формулах достаточно сделать замену: $\mathbf{R}_{in} \rightarrow \mathbf{R}_{fin} + \mathbf{r}$, $\mathbf{R}_{fin} \rightarrow \mathbf{R}_{fin} + \mathbf{r}$.

Вышеприведенные формулы позволяют путем решения системы дифференциальных уравнений (2) достаточно просто вычислять картину силовых магнитных линий для системы из замкнутых прямолинейных отрезков, по которым течет ток. При этом отрезки могут, вообще говоря, не лежать в одной плоскости, а контур из токов может иметь самопересечения без контакта в точке пересечения (изолированные провода). Наиболее простой вид имеют место силовые линии магнитного поля, когда проводящий контур лежит в одной плоскости. Если начальная точка выбрана близко лежащей к одному из отрезков, так, что поле, создаваемое этим отрезком, существенно превосходит поля от других отрезков, то силовая линия по форме близка к окружности. Плоскость окружности перпендикулярна соответствующему отрезку, а центр окружности находится на самом отрезке. Если расстояния от начальной точки до других отрезков сравнимы по величине, силовые линии имеют более сложный вид.

На рис. 4 приведены графики силовой линии в разных проекциях, рассчитанной для неправильного плоского четырехугольника. Плоскость контура тока лежит в плоскости (x, y) , а координаты угловых точек сгенерированы случайным образом. Радиус-векторы угловых точек равны:

$$\mathbf{R}_1 = (0,2785, 0,1576, 0),$$

$$\mathbf{R}_2 = (0,5479, 0,9706, 0),$$

$$\mathbf{R}_3 = (0,9575, 0,9572, 0),$$

$$\mathbf{R}_4 = (0,9679, 0,4854, 0).$$

Координаты начальной точки силовой линии, выбранной для расчета: $R_0 = (0,6948, 0,3171, 0,9502)$.

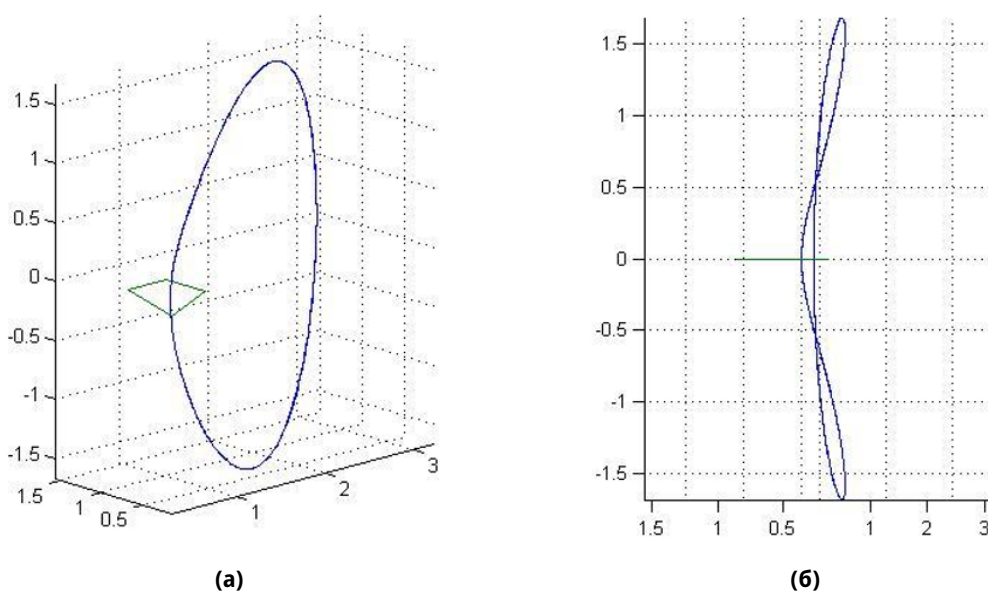


Рис. 4. Силовая линия магнитного поля для тока контура в виде неправильного плоского четырехугольника: (а) и (б) — разные проекции линии

Как видно из рис. 4б, силовая линия уже не лежит в одной плоскости. Однако явно видна симметрия линии по отражению относительно плоскости контура тока. Вычислительный эксперимент для различных плоских контуров показывает, что данное свойство симметрии сохраняется для любого плоского контура. Это свойство непосредственно следует из выражения (5). Любому элементу линии «над плоскостью» соответствует симметрично отраженный элемент «под плоскостью». Однако, поскольку векторное произведение есть псевдовектор, направление вектора индукции при таком отражении меняется на противоположное.

Именно в силу симметрии силовые магнитные линии плоского контура тока имеют простой вид замкнутых петель. Если же, хотя бы одна из точек контура четырехугольника «уходит» из плоскости, симметрия пропадает, и картина силовых линий качественно меняется. На рисунке 5 приведен пример расчета силовой линии того же четырехугольника, но четвертая точка контура немного приподнята над плоскостью, так, что её координаты равны: $\mathbf{R}_4 = (0,9649, 0,4854, 0,3000)$.

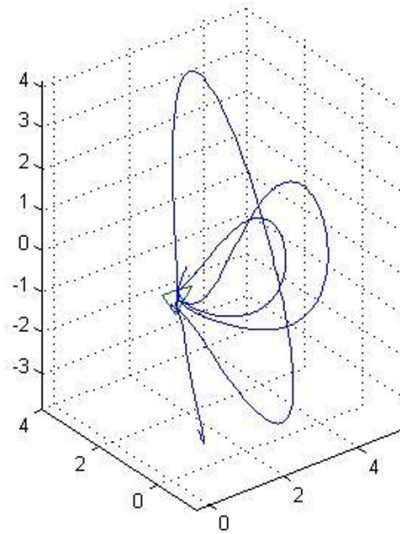


Рис. 5. Силовая линия магнитного поля для тока контура в виде неправильного неплоского четырёхугольника

Когда мой коллега — физик, квалифицированный преподаватель, увидел подобный рисунок, он высказал сомнение в правильности расчета. Действительно, ни в каких учебных пособиях не упоминается о возможности существования таких силовых линий магнитного поля. Но противоречит ли подобная линия законам электродинамики? Линия не замкнута. Но это соответствует тому, что время расчета ограничено. Подобные линии, образно говоря «замыкающиеся на бесконечности» существуют для простых систем. Примером являются линии от кругового витка с током, проходящие близко к центру витка. Что касается формы линии, то законы электродинамики не дают каких-либо ограничений.

Вышеприведенные рассуждения говорят о возможности существования подобных линий, но не подтверждают их существование. Поскольку точные аналитические расчеты в данном случае невозможны, полезно рассмотреть предельный случай, для которого аналитические выкладки покажут возможность существования «нетривиальных» линий.

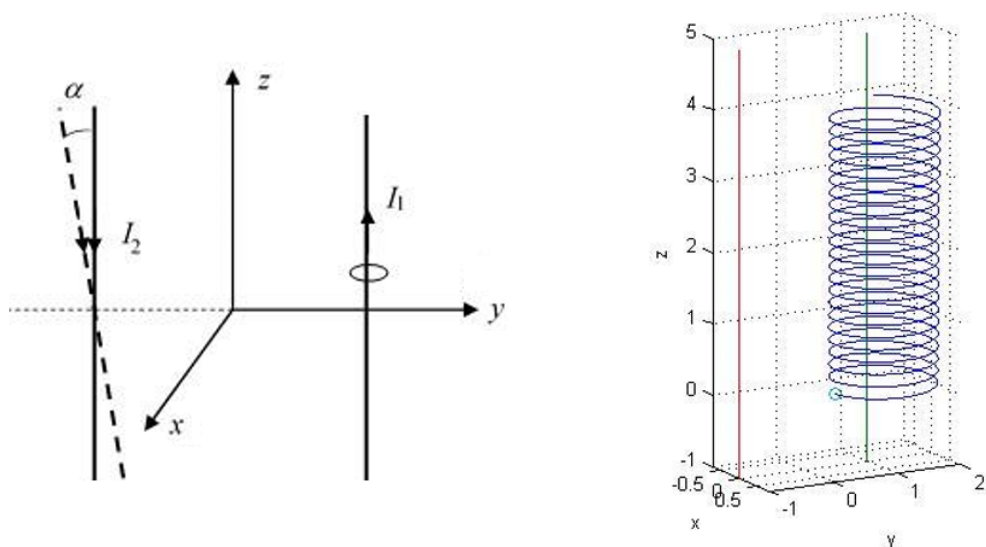
Рассмотрим поле от двух длинных прямолинейных параллельных проводников, изображенных на рисунке 6а.

Выберем систему координат так, что токи лежат в плоскости (y, z) и направлены параллельно оси z . Будем строить силовую линию, близкую к току I_1 . В отсутствие второго тока поле от первого тока определяется выражением (его можно получить, например, из формулы (6)):

$$\mathbf{V}^{(0)} = B_0(-\mathbf{i}y + \mathbf{j}x), \quad (7)$$

где \mathbf{i} и \mathbf{j} — единичные векторы, направленные по осям x и y соответственно. Константа B_0 зависит от выбора начальной точки. Система дифференциальных уравнений, соответствующая векторному уравнению (2), имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -B_0 y, \\ \dot{y} &= B_0 x, \\ \dot{z} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$



(а) схема системы

(б) рассчитанные силовые линии при небольшом отклонении от параллельности

Рис. 6. Магнитное поле в системе двух длинных прямолинейных проводов

Несложно показать, что решение этой системы уравнений окружность, перпендикулярная оси z с центром на проводе 1.

Добавим теперь поле второго провода. С учетом того, что он расположен далеко от первого, вектор магнитной индукции от этого провода направлен вдоль оси x . Таким образом, к проекции на ось x в выражении (7) добавляется некоторая величина ΔB . Система уравнений (8) принимает вид:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -B_0 y + \Delta B, \\ \dot{y} &= B_0 x, \\ \dot{z} &= 0.\end{aligned}\quad (9)$$

Если мы считаем, что поле проводника 1 в области силовой линии много меньше, чем поле проводника 2, то малая по сравнению с B_0 поправка ΔB приведет к тому, что силовая линия будет немного отличаться от окружности. Однако, по-прежнему, замкнутая силовая линия будет лежать в плоскости, перпендикулярной оси z .

Повернем теперь проводник 2 на малый угол α (рис. 6). При повороте вокруг оси x , то есть, когда проводники остаются в одной плоскости, поле от второго проводника в окрестности 1-го проводника практически не изменится. Однако при повороте вокруг оси y , когда проводники оказываются не в одной плоскости, в выражение (9) добавляется компонента $\mathbf{B}_z = \kappa \alpha \Delta B$, так что система уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -B_0 y + \Delta B, \\ \dot{y} &= B_0 x, \\ \dot{z} &= \alpha \Delta B.\end{aligned}\quad (10)$$

При малом отношении $\Delta B/B_0$ вкладом ΔB в первое уравнение можно пренебречь. Однако отличной от нуля поправкой в третьем уравнении пренебречь нельзя, поскольку качественно меняется картина силовой линии, она выходит из плоскости. Решение системы

уравнений (10) в пренебрежении слагаемым ΔB в первом уравнении есть винтовая линия с шагом порядка $\alpha \Delta B / B_0$. Численный эксперимент, результаты которого приведены на рис. 66, полностью подтверждает сделанные выше оценки. При расчете линии расстояние между проводниками принималось равным 2, начало линии лежало на расстоянии 0,5 от 1-го проводника, а угол поворота вокруг оси u равен 0,1 радиан.

Сделанные выше рассуждения можно обобщить следующим образом. Силовая линия магнитного поля от системы проводников, лежащих в одной плоскости, всегда представляет собой некоторый замкнутый виток. Если к такой системе добавить проводник, лежащий вне плоскости, происходит качественное изменение вида линии, так как появляется магнитное поле, перпендикулярное исходному витку.

Такой случай возникает, в частности, когда к полю кругового витка с током добавляется поле, направленное вдоль витка. Это можно сделать, «пропустив» сквозь виток длинный отрезок прямолинейного проводника. Если такой проводник проходит через центр витка и перпендикулярен плоскости витка, силовая линия должна иметь вид винтовой линии, «намотанной» на поверхность тора. Результаты соответствующего расчета для данной системы проводников приведены на рисунке 7.

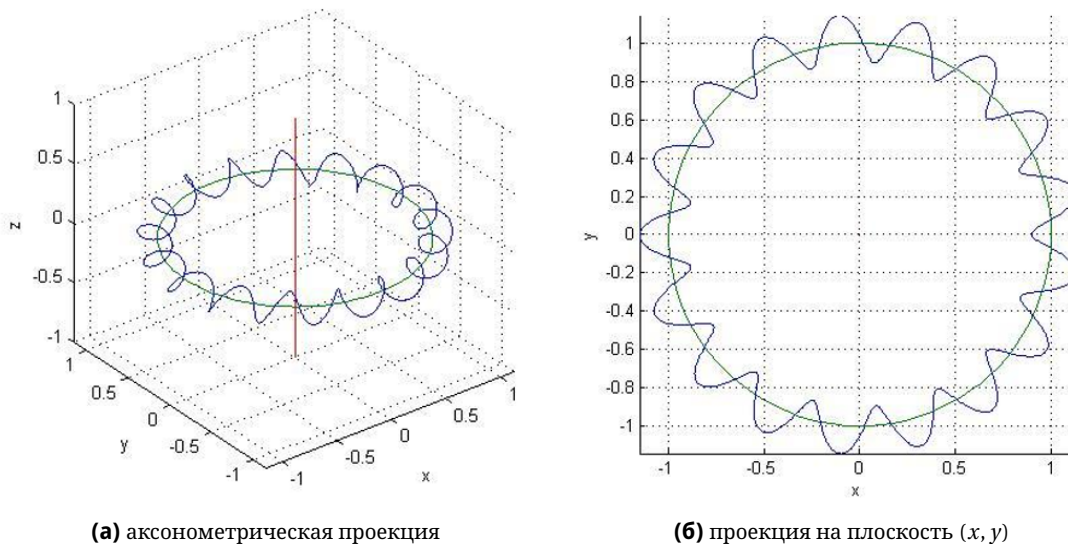


Рис. 7. Силовая линия для системы проводников, состоящей из кольца и прямолинейного проводника: (а) и (б) — разные проекции линии

При проведении расчета полагалось, что прямолинейный проводник располагается вдоль оси z , а кольцо единичного радиуса лежит в плоскости (x, y) . Поле прямолинейного проводника определяется из формул (7). Модуль индукции поля определялся выражением:

$$B_L(x, y) = \frac{B_{L_0}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (11)$$

где B_{L_0} — константа, характеризующая величину поля, создаваемого током прямолинейного провода. Поле от витка с током вычислялось в результате численного интегрирования выражения (5), для чего использовалась процедура «quad» в среде Matlab. Три компоненты поля выражались следующими интегралами:

$$\begin{aligned}
 B_{C_x}(x, y, z) &= -B_{C_0} z \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi f(x, y, z, \varphi), \\
 B_{C_y}(x, y, z) &= -B_{C_0} z \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi f(x, y, z, \varphi), \\
 B_{C_z}(x, y, z) &= B_{C_0} \int_0^{2\pi} d\varphi (x \cos \varphi + y \sin \varphi - 1) f(x, y, z, \varphi),
 \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$f(x, y, z, \varphi) = (x^2 + y^2 + z^2 + 1 - 2x \cos \varphi - 2y \sin \varphi)^{-3/2},$$

B_{C_0} — константа, характеризующая величину поля от тока в кольце. На рис. 7 приведены результаты расчета для силовой линии магнитного поля, начинающейся в точке с координатами $X_0 = 0,9$, $Y_0 = Z_0 = 0$. Линии силового поля, которые приходят в начальную точку после прохождения по поверхности тора, получаются при определенных отношениях B_{L_0}/B_{C_0} , значения которых зависят от начальной координаты линии. Для варианта расчета, который представлен на рис. 7, это отношение равно 7,61. При других отношениях B_{L_0}/B_{C_0} линия магнитного поля может прийти в исходную точку после нескольких проходов вокруг оси симметрии, причем число оборотов может быть сколь угодно большим. Это же имеет место, при том же значении отношения B_{L_0}/B_{C_0} , но при другой начальной точке, из которой выходит линия.

Приведенная на рис. 7 линия может показаться некоторой экзотикой, поскольку каких-либо упоминаний о подобных картинах линий в учебниках, как правило, не приводится. Однако в научных публикациях подобные картины встречаются. Так, например, подобные винтовые линии возникают при выбросе коронального солнечного вещества в межпланетное пространство [10]. Структура подобных линий описывается различными достаточно сложными моделями так называемого «бессилового магнитного поля». Как видно из приведенного расчета, подобная структура возникает при суперпозиции магнитных полей двух простейших систем, изучаемых, обычно в школьных и вузовских курсах магнитостатики.

Отметим ещё одну особенность вышерассмотренной системы. Векторы индукции магнитных полей от кольца с током и от прямолинейного провода взаимно ортогональны. Поэтому принцип суперпозиции полей проявляется как принцип суперпозиции движений. Движение материальной точки по окружности, к которому добавлено движение перпендикулярно плоскости кольца, становится движением по винтовой линии. Именно это имеет, например, место при движении заряженной частицы в однородном магнитном поле.

Выше были рассмотрены системы с относительно малым числом элементов токов. Естественно, что по мере усложнения систем, рассчитанные картины силовых линий оказываются более сложными. Кроме того, при этом всегда возникает вопрос, насколько проведенный расчет адекватен реальности, которая должна соответствовать исследуемой модели. Анализ такой адекватности может быть основан на сочетании использования аналитических и численных методов исследования [11]. К аналитическим методам исследования относятся, в частности, методы, основанные на свойствах симметрии рассматриваемой системы. Выше мы уже использовали подобные методы, далее, в качестве ещё одного примера рассмотрим магнитное поле системы из четырех одинаковых кру-

говых витков, являющихся образующими тора, расположенных симметрично на поверхности тора.

Будем исходить из тороидальной катушки, которая обычно моделируется как система плотно расположенных круговых витков на поверхности тора, токи в которых текут в одном направлении. Подобная модель часто используется при изучении магнитного поля простейших систем. Магнитное поле тороидальной катушки сосредоточено в основном внутри тора, а силовые линии являются окружностями, центры которых расположены на оси симметрии тора, а плоскости окружностей перпендикулярны этой оси. Величину индукции магнитного поля для каждой из окружностей легко рассчитать аналитически, используя теорему о циркуляции магнитного поля. Будем теперь постепенно убирать витки. Очевидно, что в этом случае появится магнитное поле в пространстве между витками, то есть поле, образно говоря, «будет выходить из внутреннего пространства тора». Можно предполагать, что, чем меньше витков остаётся, тем больше поля будет вне внутреннего объёма тора. Оставим от катушки лишь 4 витка, так что расстояния между соседними витками будут одинаковы.

Некоторые качественные особенности картины силовых линий такой системы можно предсказать, используя свойства симметрии. Выберем систему отсчета так, чтобы ось симметрии тора была направлена по оси z , и начало координат находилось в центре тора. Рассматриваемая система имеет 5 плоскостей симметрии. Одна, будем называть её условно «главной», это плоскость с координатой $z = 0$. Ещё две располагаются так, что в них лежат противоположные витки токов рассматриваемой системы. Для краткости будем называть каждую из таких плоскостей «плоскость контура». Эти плоскости проходят через ось симметрии исходного тора. Наконец, ещё две плоскости симметрии также проходят через ось симметрии тора, а их нормали образуют угол 45° с нормальными плоскостями контуров. Далее для краткости будем называть такие плоскости «побочными».

Рассматривая симметрично расположенные элементы витков, можно показать, что в точках, лежащих на главной плоскости симметрии, проекция $B_z = 0$, откуда следует, что силовые линии не будут пересекать главную плоскость симметрии, и картина силовых линий будет симметрична относительно главной плоскости симметрии. В противоположность этому, в точках, лежащих на плоскостях контуров и на побочных плоскостях симметрии, вектор индукции магнитного поля ортогонален соответствующей плоскости симметрии. Проводя рассуждения, аналогичные тем, что были сделаны при рассмотрении системы токов, лежащих в одной плоскости, можно прийти к выводу, что картина силовых линий рассматриваемой системы будет представлять собой некоторые относительно простые замкнутые витки.

Чтобы предсказать ещё некоторые особенности линий магнитного поля, можно рассмотреть поле вблизи одного из витков, то есть поле на расстоянии от тока витка много меньшем размеров витка. Достаточно очевидно, что в таком предельном случае линия силового поля будет представлять собой окружность, подобно окружности силовой линии от прямолинейного проводника. При удалении начальной точки расчета от витка такая окружность будет деформироваться в некоторый замкнутый виток, вообще говоря, не лежащий в одной плоскости.

Наконец, ещё одно соображение можно привести, рассматривая переход от тороидальной катушки к системе с небольшим числом витков. В катушке все витки силовых линий лежат внутри пространства тора. При уменьшении числа витков часть линий, как можно ожидать, будет также пронизывать все витки. Возможно, такие линии будут иметь место и для системы из четырех витков, однако справедливо ли такое предположение, может показать лишь численный эксперимент.

Численный эксперимент заключается в вычислении картины силовых линий при варьировании относительных размеров, характеризующих тор, и точки «начала» силовой линии. В данной работе мы ограничились следующими параметрами тора: радиус тора (радиус окружности, проходящей через середины витков с током) равен 10, а радиус витка с током равен 1. Расчет вектора индукции магнитного поля проводился при помощи формул (12). Результаты расчета некоторых силовых линий приведены на рисунке 8. Направления силовых линий зависят от направления токов в витках и могут быть легко определены, исходя из общих правил.

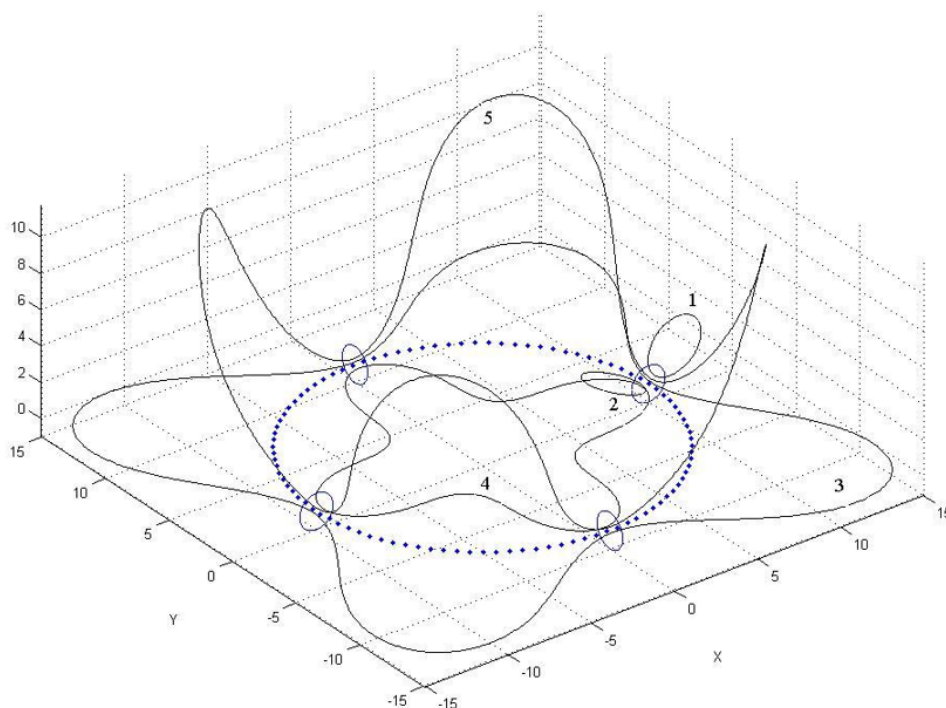


Рис. 8. Картина силовых линий магнитного поля для системы из 4 витков с током, являющихся образующими тора

Пунктирная линия на рисунке — окружность, проходящая через центры всех витков. Начальные точки расчета всех приведенных на рисунке линий лежат в одной из плоскостей контуров и находятся внутри одного из витков с током. Такой выбор начальных точек обусловлен тем, что любая из силовых линий должна в соответствии с теоремой о циркуляции магнитного поля проходить сквозь хотя бы один виток. Для характеристики положения начальной точки расчета далее используются полярные координаты (ρ, φ) . Значение $\rho = 0$ соответствует точке в центре витка с током, $\rho = 1$ — точке на контуре тока. Угол $\varphi = 0$ соответствует направлению от центра тора к рассматриваемому витку. Нумерация линий на рисунке соответствует параметрам, приведенным в таблице 1.

Таблица 1. Параметры расчета кривых, приведенных на рис. 8

Номер кривой на рис. 8	1	2	3	4	5
ρ	0,5	0,5	0,2	0,4	0,3
φ (град.)	45	160	0	180	70

Как видно из рисунка, основные свойства силовых линий, следующих из соображений симметрии, подтверждаются численным экспериментом. Если начальная точка расчета находится достаточно близко к току витка (значение ρ близко к единице), силовые линии охватывают окружности данного витка (линии 1 и 2). Назовем условно такие линии «частными». Эти линии симметричны по отношению к отражению в плоскости контура. Как показывает расчет, если подобный виток силовой линии становится достаточно большим, он уже не является плоским. При малых значениях ρ появляются линии, проходящие через все 4 витка. Назовем условно такие линии «общими». При этом, если начало расчета линии лежит в «главной» плоскости симметрии, линии также лежат в этой плоскости (линии 3 и 4). Наконец, при малых значениях ρ , если начало линии лежит вне «главной» плоскости симметрии, появляются «коронообразные» силовые линии (линия 5). Расчет подтверждает свойство картины, следующее из симметрии: все линии не пересекают «главную» плоскость симметрии, и для каждой линии, лежащей «выше» плоскости симметрии, имеется симметричная линия, лежащая «ниже» плоскости симметрии. Также имеет место симметрия картины линий по отношению к отражению относительно любой другой плоскости симметрии.

Численный эксперимент показывает, что, если при заданном значении φ увеличивать начальное значение ρ от некоторой малой величины, то, начиная с некоторого значения $\rho_0(\varphi)$, наблюдается переход от «общей» линии к «частной». Численный расчет также показывает, что, если начальная точка расчета лежит в плоскости симметрии контура и характеризуется значением $\rho > 1$, или лежит вне плоскостей контуров, то линий с новыми качественными особенностями, по сравнению с линиями, изображенными на рисунке 8, не появляется. Любая линия относится либо к типу «частной» линии, либо к типу «коронообразной» линии.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенный в статье метод расчета силовых линий постоянного электрического поля и постоянного магнитного поля обладает рядом преимуществ перед традиционно используемыми методами визуализации полей. Это преимущество особенно проявляется, когда заранее неизвестна форма силовой линии в трехмерном пространстве. Кроме того, использование аналогий с полем скоростей в потоке жидкости делает этот метод особенно наглядным. Заметим также, что некоторые из предложенных в статье задач могут быть представлены как достаточно интересные задачи для вычислительного эксперимента в рамках учебных курсов по математическому моделированию.

Список литературы

1. Фейнман Р., Лейтон Р, Сэндз. Фейнмановские лекции по физике. Т. 5. М.: Мир, 1966. 296 с.
2. Веприяк И. А., Матушкин В. Л. Устройство для визуализации магнитного поля // Искровые технологии в транспортном строительстве: Материалы всероссийской научно-практической конференции, Петергоф, 16 июня 2022 г. Петергоф: Военный институт (Железнодорожных войск и военных сообщений) Военной академии материально-технического обеспечения имени генерала армии А. В. Хрулева, 2022. С. 121–126.
3. Назаренко А. Ф., Глаголевский Ю. В. Программа интерактивной визуализации магнитных и электрических полей // Системный синтез и прикладная синергетика : Сборник научных работ XI Всероссийской научной конференции, п. Нижний Архыз, 27 сентября – 01 октября 2022 года. Ростов-на-Дону—Таганрог: Южный федеральный университет, 2022. С. 145–146. doi:10.18522/syssyn-2022-28

4. Сабирзянов А. А. Построение силовых линий электростатического поля по методу Максвелла // Учебная физика. 2022. № 1. С. 33–40.
5. Бирюков, С. В., Тюкин А. В., Тюкина Л. В. Метод визуализации силовых линий магнитного поля в Matlab // Актуальные проблемы современной науки : Материалы V региональной научно-практической конференции с международным участием, Омск, 15 апреля 2016 г. Омск: Омский государственный технический университет, 2016. С. 68–72.
6. Иванов В. М., Винокуров Е. Б., Фофана С. Математическое моделирование процессов измерения электромагнитных полей по муаровым картинам // Математические методы в технике и технологиях. 2014. № 2(61). С. 69–73.
7. Куликова К. В., Однобоков В. В. Изучение картины эквипотенциальных поверхностей и силовых линий электростатического поля в пакете Autocad // Потенциал интеллектуально одаренной молодежи — развитию науки и образования : Материалы XII Международного научного форума молодых ученых, инноваторов, студентов и школьников, Астрахань, 29–31 мая 2023 года. Том 12. Астрахань: Астраханский государственный архитектурно-строительный университет, 2023. С. 45–48.
8. Кондратьев А. С., Ляпцев А. В. Физика. Задачи на компьютер. М., 2008. 400 с.
9. Корн Г., Корн Е. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970 г. 720 с.
10. Петухова А. С., Петухов С. И. Тороидальные модели магнитного поля с винтовой структурой // Солнечно-земная физика. 2019. Т. 5, № 2. С. 74–81. doi:10.12737/szf-52201910
11. Кондратьев А. С., Ляпцев А. В. Математическое моделирование: аналитические и вычислительные методы // Компьютерные инструменты в образовании. 2007. № 5. С. 20–24.

Поступила в редакцию 12.11.2025, окончательный вариант — 15.01.2026.

Ляпцев Александр Викторович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры методики обучения физике, РГПУ им. А.И. Герцена, ✉ upm_eno@mail.ru

Computer tools in education, 2026

№ 1: 22–39

<http://cte.eltech.ru>

doi:10.32603/2071-2340-2026-1-22-39

Computer Visualization of Field Lines of Constant Electric and Constant Magnetic Fields

Liapzev A. V.¹, ✉ upm_eno@mail.ru

¹ Herzen State Pedagogical University of Russia, Moika River nab. 48, St. Petersburg, 191186, Russian Federation

Abstract

A method is proposed for constructing a picture of the field lines of constant electric and magnetic fields based on the numerical solution of a system of differential equations followed by visualization by graphs in three-dimensional space. It is shown that the application of this method makes it possible to understand and demonstrate some qualitative features of the field lines, due in particular to the symmetry of the systems under consideration. The examples considered show that even for the simplest systems studied in electrostatics and magnetostatics courses, the pattern of field lines can be complex and sometimes unpredictable.

Keywords: *computer modeling, electric field lines, magnetic field lines, visualization of field lines.*

Citation: A. V. Liapzev, "Computer Visualization of Field Lines of Constant Electric and Constant Magnetic Fields," *Computer tools in education*, no. 1, pp. 22–39, 2026 (in Russian); doi:10.32603/2071-2340-2026-1-22-39

References

1. R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. 5., Moscow, Russia: Mir, 1966 (in Russian).
2. I. A. Vepriyakov and V. L. Matushkin, "Device for visualization of magnetic field," in *Proc. All-Russian Sci.-Pract. Conf. Spark Technol. Transp. Construct. (Petershof, Russia)*, 2022, pp. 121–126 (in Russian).
3. A. F. Nazarenko and Yu. V. Glagolevsky, "Program for interactive visualization of magnetic and electric fields," in *Proc. XI All-Russian Sci. Conf. Syst. Synth. Appl. Synerg. (Nizhny Arkhyz, Russia)*, 2022, pp. 145–146 (in Russian); doi: 10.18522/syssyn-2022-28
4. A. A. Sabirzyanov, "Construction of electrostatic field lines by Maxwell's method," *Uchebnaya Fizika*, no. 1, pp. 33–40, 2022 (in Russian).
5. S. V. Biryukov, A. V. Tyukin, and L. V. Tyukina, "Method for visualizing magnetic field lines in Matlab," in *Proc. V Regional Sci.-Pract. Conf. Curr. Probl. Mod. Sci. (Omsk, Russia)*, 2016, pp. 68–72 (in Russian).
6. V. M. Ivanov, E. B. Vinokurov, and S. Fofana, "Mathematical modeling of electromagnetic field measurement processes using moir'e patterns," *Mat. Metody Tekh. Tekhnol.*, no. 2(61), pp. 69–73, 2014 (in Russian).
7. K. V. Kulikova and V. V. Odnobokov, "Study of the pattern of equipotential surfaces and field lines of an electrostatic field in AutoCAD," in *Proc. XII Int. Sci. Forum Young Sci., Innov., Students Schoolchild. (Astrakhan, Russia)*, vol. 12, 2023, pp. 45–48 (in Russian).
8. A. S. Kondratyev and A. V. Lyaptsev, *Physics: Computer-Based Problems*, Moscow, Russia: Fizmatlit, 2008 (in Russian).
9. G. Korn and T. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, Moscow, Russia: Nauka, 1970 (in Russian).
10. A. S. Petukhova and S. I. Petukhov, "Toroidal models of the magnetic field with a helical structure," *Solnechno-Zemnaya Fizika*, vol. 5, no. 2, pp. 74–81, 2019 (in Russian); doi:10.12737/szf-52201910
11. A. S. Kondratyev and A. V. Lyaptsev, "Mathematical modeling: Analytical and computational methods," *Computer Tools in Education*, no. 5, pp. 20–24, 2007 (in Russian).

Received 12-11-2025, the final version — 15-01-2026.

Alexander Liapzev, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor at the Department of Methods of Teaching Physics, Herzen University, ✉ upm_eno@mail.ru